Structures algébriques
23 octobre 2007

Examen 1

1. (a) Définir l'*ordre* d'un élément d'un groupe G.
   (b) Montrer que si G est un groupe fini et $g \in G$, alors $\text{ord}(g)$ est un diviseur de $|G|$.
   (c) Montrer que si $g \in G$ et $g^n = e$, alors $\text{ord}(g)|n$.
   (d) Donner un exemple d'un groupe qui contient des éléments d'ordre fini et des éléments d'ordre infini.

2. Soit G l'ensemble des matrices 3×3 de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   pour $x, y, z \in \mathbf{R}$.

   (a) Montrer que G est un groupe sous l'opération de multiplication des matrices.
   (b) Soit H le groupe $\mathbf{R}^2$ muni de l'opération $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Soit $\phi\colon G \to H$ l'application qui associe à la matrice (1) le couple (x, z). Montrer que ϕ est un homomorphisme, et identifier son image et son noyau.

3. Combien y a-t-il de permutations d'ordre 4 dans A_7?

4. Pour G un groupe quelconque, on définit

$$Z(G) = \{h \in G : hg = gh \text{ pour tout } g \in G\}.$$

   (a) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe normal abélien de G.
   (b) On suppose maintenant que $G = S_n$. En considérant la transposition $g = (ij)$, montrer que si $h \in Z(S_n)$, alors ou bien $h(i) = i$ et $h(j) = j$, ou bien $h(i) = j$ et $h(j) = i$.
   (c) Déduire que $Z(S_n) = \{e\}$ si $n \geq 3$. [Suggestion: appliquer à nouveau le (b), cette fois-ci avec $g = (ik)$, où $k \neq i, j$.]